

# ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 12 SEPTEMBRE 1938.

PRÉSIDENTE DE M. AUGUSTE BÉHAL.

## CORRESPONDANCE.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la convergence des séries de Fourier.*

Note de M. RAPHAËL SALEM.

Soient  $a_n, b_n$  les coefficients de Fourier de la fonction sommable  $f(x)$  et  $s_n(f)$  sa somme de Fourier d'ordre  $n$ . Posons

$$A_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad \rho_n^2 = a_n^2 + b_n^2 \quad (a_0 = 0).$$

Nous supposons la série  $\sum \rho_n^2 \omega(n)$  convergente,  $\omega(n)$  étant une fonction croissante, de croissance plus lente que  $\log n$ , et nous déterminerons une suite croissante d'entiers  $n_k$ , indépendante de  $f$ , dépendant seulement de  $\omega(n)$ , telle que  $s_{n_k}(f)$  converge presque partout <sup>(1)</sup>. Pour cela considérons, suivant une méthode connue, l'intégrale  $I = \int_0^{2\pi} s_{n(x)}(x) dx$ ,  $n(x)$  étant variable avec  $x$  et au plus égal à  $n$ . Si l'on désigne par  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$ , ...,  $\psi_n(x)$  une suite décroissante de fonctions caractéristiques d'ensembles et si l'on pose, pour simplifier l'écriture,  $\varepsilon_n \sqrt{\omega(n)} = 1$ , on a

$$I = \int_0^{2\pi} \sum \psi_p \Lambda_p dx = \int_0^{2\pi} \sum \varepsilon_p \psi_p \Lambda_p \sqrt{\omega(p)} dx.$$

Désignant par  $F(x)$  la fonction de carré sommable dont les coefficients de Fourier sont  $a_n \sqrt{\omega(n)}$ ,  $b_n \sqrt{\omega(n)}$ , on a

$$I = \int_0^{2\pi} \sum \Delta(\varepsilon_p \psi_p) s_p(F) dx = \int_0^{2\pi} \sum \varepsilon_p \Delta \psi_p s_p(F) dx + \sum \Delta \varepsilon_p \int_0^{2\pi} \psi_{p+1} s_p(F) dx.$$

\* <sup>(1)</sup> On sait que, si  $\omega(n) = \log n$ ,  $s_n(f)$  converge presque partout. Dans ce qui va suivre nous désignerons par  $s_n(\varphi)$  la somme de Fourier d'ordre  $n$  d'une fonction  $\varphi$ , par  $\sigma_n(\varphi)$  sa somme de Féjer d'ordre  $n$ . Nous poserons  $\Delta u_p = u_p - u_{p+1}$  avec  $\Delta u_n = u_n$  si  $u_n$  est le dernier terme de la suite. Sauf indication contraire les sommations s'entendront de 1 à  $n$ .

La première intégrale peut s'écrire  $\int_0^{2\pi} F \Sigma \varepsilon_p s_p(\Delta\psi_p) dx$  et son carré est inférieur à  $\int_0^{2\pi} F^2 dx \int_0^{2\pi} [\Sigma \varepsilon_p s_p(\Delta\psi_p)]^2 dx$ . Or on a

$$\begin{aligned} & \sum_{q=p}^{q=n} \int_0^{2\pi} \varepsilon_p \varepsilon_q s_p(\Delta\psi_p) s_q(\Delta\psi_q) dx \\ &= \sum_{q=p}^{q=n} \int_0^{2\pi} \varepsilon_p \varepsilon_q s_p(\Delta\psi_p) \Delta\psi_q dx = \int_0^{2\pi} \varepsilon_p^2 s_p(\Delta\psi_p) \chi_p dx = \int_0^{2\pi} \varepsilon_p^2 s_p(\chi_p) \Delta\psi_p dx, \end{aligned}$$

$\chi_p$  étant une fonction positive, inférieure à l'unité. De plus,  $k_p, k'_p$  étant deux exposants positifs complémentaires,

$$\Delta\psi_p |\varepsilon_p^2 s_p(\chi_p)| < \frac{1}{k_p} |\varepsilon_p^2 s_p(\chi_p)|^{k_p} + \frac{1}{k'_p} (\Delta\psi_p)^{k'_p} \quad \left( \frac{1}{k_p} + \frac{1}{k'_p} = 1 \right).$$

D'autre part <sup>(2)</sup>, si  $k_p > 2$ ,

$$\int_0^{2\pi} |s_p(\chi_p)|^{k_p} dx < (4k_p)^{k_p} \int_0^{2\pi} \chi_p^{k_p} dx < 2\pi (4k_p)^{k_p}.$$

On déduit de tout ce qui précède,  $c$  étant une constante indépendante de  $f$ ,

$$|I| < c \left( \int_0^{2\pi} F^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left[ 1 + \sum \frac{1}{k_p} (4k_p \varepsilon_p^2)^{k_p} \right].$$

La considération des intégrales précédentes montre que dans cette somme il n'y a à faire entrer que les  $p$  qui font partie des valeurs prises par  $n(x)$  dans I. En remarquant que  $\omega(n)$  n'est déterminée qu'à une constante multiplicative près, et en prenant les  $k_p$  proportionnels aux  $\omega(p)$ , on voit que la suite d'entiers  $n_k$  satisfera au problème posé si l'on a

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} A^{-\omega(n_k)} < \infty,$$

$A$  étant une constante positive fixe, d'ailleurs aussi grande qu'on voudra.

Quand la croissance de  $\omega(n)$  est assez lente, les résultats ainsi obtenus sont dépassés par ceux obtenus par la méthode très simple suivante. On a

$$\int_0^{2\pi} |s_n(f) - \sigma_n(f)|^2 dx = \frac{\pi}{(n+1)^2} [\rho_1^2 + 2^2 \rho_2^2 + \dots + n^2 \rho_n^2].$$

Si  $E_n$  est l'ensemble des points où  $|s_n - \sigma_n|$  dépasse  $\eta_n$ , la mesure de cet

(2) Cf. ZYGMUND, *Trigonometrical Series*, Varsovie, 1935, p. 153.



ensemble est inférieure à  $\pi(\rho_1^2 + \dots + n^2 \rho_n^2)/\eta_n^2 n^2$ ; d'où l'on déduit immédiatement en faisant tendre les  $\eta_n$  vers zéro aussi lentement qu'on voudra que, si l'on a

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_1^2 + 2^2 \rho_2^2 + \dots + n_k^2 \rho_{n_k}^2}{n_k^2} < \infty,$$

la suite d'entiers  $n_k$  satisfait au problème posé <sup>(3)</sup>. Supposons maintenant la convergence de  $\sum \rho_n^2 \omega(n)$ ; on voit facilement que la condition (2) est satisfaite si (notation de Landau)

$$(3) \quad \frac{1}{n_k^2} + \frac{1}{n_{k+1}^2} + \dots = O\left[\frac{\omega(n_k)}{n_k^2}\right].$$

Ceci a lieu quelle que soit  $\omega(n)$ , si  $n_{k+1}/n_k > \lambda > 1$ , ce qui fait retrouver très simplement un résultat connu. Mais le choix des  $n_k$  par la condition (3) donne de meilleurs résultats que leur choix par la condition (1) dès que la croissance de  $\omega(n)$  est inférieure à celle de  $\log \log n$ . En effet, en prenant pour  $n_k$  la fonction  $e^{\varphi(k)}$  supposée croissante et convexe, on voit que la condition (3) est réalisée en prenant

$$\omega[e^{\varphi(k)}] > \frac{1}{\varphi'(k)}, \quad \text{car} \quad \int_k^{\infty} e^{-2\varphi(x)} dx < \frac{e^{-2\varphi(k)}}{\varphi'(k)}.$$

C'est-à-dire en posant  $\omega(n) = \theta(\log n)$  et désignant par  $\Theta(x)$  l'intégrale  $\int_0^x \theta(x) dx$ , que  $\Theta[\varphi(k)] > k$ ; or le choix de  $\varphi(k)$  par la condition (1) conduit à prendre  $\theta[\varphi(k)] > \mu \log k$ ,  $\mu$  étant une constante. Il suffit de remarquer que  $\Theta(x)$  est inférieur à  $x\theta(x)$  pour en déduire le résultat annoncé.

**THÉORIE DES FONCTIONS.** — *Sur l'approximation des fonctions continues par certaines fonctions harmoniques.* Note <sup>(1)</sup> de M. **FRANÇOIS LEJA**, transmise par M. **Émile Borel**.

Soient  $f(x)$  une fonction réelle continue dans un intervalle fermé  $J = \langle a, b \rangle$ ,  $\lambda$  un paramètre réel et  $n$  un nombre entier positif fixe. Désignons par  $\zeta$  un système de  $n+1$  points différents quelconques

$$(1) \quad \{ \zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n \} = \zeta$$

<sup>(3)</sup> Cette solution ne suppose pas que la fonction  $f$  soit de carré sommable. Elle fournit une suite de  $n_k$ , par exemple, si  $n \rho_n^2 \rightarrow 0$ .

<sup>(1)</sup> Séance du 20 avril 1938.



appartenant à  $\mathcal{J}$ ; formons les polynômes correspondants de Lagrange

$$\mathcal{E}_n^{(j)}(x, \zeta) = \frac{x - \zeta_0}{\zeta_j - \zeta_0} \cdots \frac{x - \zeta_{j-1}}{\zeta_j - \zeta_{j-1}} \frac{x - \zeta_{j+1}}{\zeta_j - \zeta_{j+1}} \cdots \frac{x - \zeta_n}{\zeta_j - \zeta_n}$$

( $j = 0, 1, \dots, n$ )

et considérons la somme

$$(2) \quad F_n(x, \lambda, \zeta) = \sum_{j=0}^n e^{n\lambda f(\zeta_j)} [\mathcal{E}_n^{(j)}(x, \zeta)],$$

se réduisant à  $e^{n\lambda f(x)}$  pour  $x = \zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n$ .

Lorsque les nombres (1) varient arbitrairement dans  $\mathcal{J}$  la somme (2) varie, mais elle possède pour chaque  $x, \lambda$  et  $n$  fixe une borne inférieure positive que je désignerai par

$$F_n(x, \lambda) = \text{borne inf. } \{F_n(x, \lambda, \zeta)\}_{(\zeta \in \mathcal{J})}.$$

Faisons maintenant varier  $n$  et posons

$$(3) \quad f_n(x, \lambda) = \frac{1}{n} \log F_n(x, \lambda) \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots$$

Ces fonctions ont des valeurs déterminées pour chaque  $\lambda$  réel et pour chaque  $x$  réel ou complexe. Elles restent dans une intime liaison avec la fonction donnée  $f(x)$ , à condition que  $\lambda \neq 0$ ; dans le cas  $\lambda = 0$  elles ne dépendent que de l'intervalle  $\mathcal{J}$ .

J'ai démontré ailleurs que la suite (3) jouit des propriétés suivantes<sup>(2)</sup>:

I. Pour chaque  $\lambda$  réel, la suite (3) tend dans le plan entier de la variable complexe  $x$  vers une limite

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, \lambda) = f(x, \lambda).$$

La fonction  $f(x, \lambda)$  de  $x$  est partout continue pour chaque  $\lambda$  fixe, elle est harmonique et régulière partout à l'exception des points de l'intervalle  $\mathcal{J}$  au plus.

II. Lorsque  $\lambda = 0$ ,  $f(x, \lambda)$  se réduit à la fonction de Green du domaine infini, extérieur au segment  $\mathcal{J}$ , ayant son pôle à l'infini.

Considérons maintenant la famille des fonctions harmoniques  $f(x, \lambda)$ , où  $-\infty < \lambda < \infty$  et  $\lambda \neq 0$ . On peut prouver que, pour chaque valeur fixe de  $x$  appartenant à l'intervalle  $\mathcal{J}$ , l'expression

$$(5) \quad \frac{1}{\lambda} f(x, \lambda)$$

(2) *Annales de la Soc. Polon. de Mathém.*, 16, 1938, p. 112-135.



reste bornée dans le voisinage de  $\lambda = 0$ . Plus précisément, on peut démontrer que :

III. Lorsque  $\lambda$  tend vers zéro l'expression (6) tend dans l'intervalle  $J$  vers la fonction donnée  $f(x)$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} f(x, \lambda) = f(x),$$

la convergence étant uniforme dans  $J$ .

Il en résulte, en particulier, qu'on a la formule

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} \log F_n \left( x, \frac{1}{m} \right) \right\},$$

qui permet d'approcher une fonction continue quelconque  $f(x)$ , définie dans un intervalle  $J$ , par des valeurs frontières des fonctions harmoniques

$$mf \left( x, \frac{1}{m} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} \log F_n \left( x, \frac{1}{m} \right) \quad (m = 1, 2, \dots),$$

régulières dans le plan entier à l'exception des points  $J$  au plus.

PHYSICOCHIMIE. — *Étude de la constitution de l'acide nitrique d'après ses spectres d'absorption.* Note de M. **RENÉ DALMON**, transmise par M. Charles Fabry.

A l'occasion d'une étude sur les spectres d'absorption des mélanges sulfonitriques, nous avons été conduit à reprendre les spectres de l'acide nitrique et à comparer nos résultats avec ceux de Schæfer <sup>(1)</sup> et de von Halban et Eisenbrand <sup>(2)</sup>.

Nos mesures ont surtout porté sur la détermination aussi précise que possible du coefficient d'extinction moléculaire  $\epsilon$  en fonction de la concentration  $c$ . Nous avons opéré par la méthode de photométrie photographique.

$\epsilon$  est calculé à partir de la formule de Lambert-Beer

$$D = \epsilon c d,$$

$D$ , densité optique du corps absorbant;

$c$ , concentration exprimée en nombre de molécules-grammes par litre;

$d$ , épaisseur en centimètre du liquide absorbant.

Toutes nos mesures ont été faites au voisinage de  $0^\circ$  ( $1^\circ < T < 2^\circ$ ) afin d'éviter la décomposition des acides concentrés.

(1) *Z. anorg. allgem. Chem.*, **97**, 1916, p. 285.

(2) *Z. physik. Chem.*, **132**, 1928, p. 433.



Voici un tableau donnant, pour  $\lambda 3180 \text{ \AA}$ , la variation de  $\varepsilon$  en fonction de  $c$ .

$c$ .			$c$ .			$c$ .		
Mol/l.	Pour 100 en poids.	$\varepsilon$ .	Mol/l.	Pour 100 en poids.	$\varepsilon$ .	Mol/l.	Pour 100 en poids.	$\varepsilon$ .
0,835	5,1	3,60	8,8	43,2	1,54	20,2	85	0,22
1,68	10,0	3,41	10,7	50,1	1,20	20,9	87,7	0,20
2,64	15,2	3,11	11,9	55,3	1,01	21,3	89,2	0,18
3,6	20,2	2,89	13,7	61,5	0,73	21,8	90,98	0,17
4,64	25,2	2,61	14,5	64,5	0,63	22,5	93,2	0,15
5,82	30,6	2,35	15,6	68,7	0,48	23	95,0	0,143
6,87	35,2	2,07	16,7	72,7	0,39	23,6	97,2	0,127
8	39,9	1,81	19,2	81,5	0,26	24,2	99,1	0,14
						24,6	100,1	0,16

Si l'on construit la courbe  $\varepsilon = f(c)$  on voit que :

1°  $\varepsilon$  varie linéairement de 0 à  $10n$  environ.

2° De  $10n$  à  $23,6n$  la courbe décroît moins rapidement, passe par un minimum à  $23,6n$  (97,2 pour 100), puis croît jusqu'à  $24,6n$ . Ce minimum est dû à la formation, à partir de 97 pour 100 environ, d'anhydride azotique; en effet Chédin <sup>(3)</sup> a montré que, dans les spectres Raman des acides azotiques concentrés, la raie caractéristique de  $N^2O^5$  de fréquence  $1400\text{cm}^{-1}$  se manifestait à partir de cette concentration. On interprète donc ce minimum par la même cause. La formation de peroxyde d'azote ne peut être invoquée, les acides utilisés, préparés avec le plus grand soin, conservés dans la glace carbonique et amenés à 0° environ pour la prise des spectres, étaient rigoureusement incolores sous des épaisseurs d'environ  $20\text{cm}$ .

Si l'on construit les courbes  $\varepsilon = f(\lambda)$  pour les diverses concentrations, on obtient un réseau auquel on peut appliquer la règle de Darmois <sup>(4)</sup> pour voir s'il y a deux ou plusieurs particules absorbantes en solution. On trouve que :

1° Jusqu'à  $10n$  environ la règle s'applique bien. Ce résultat était d'ailleurs prévu, puisque von Halban et Eisenbrand ont montré que les courbes  $\varepsilon = f(\lambda)$  passent par un même point ce qui constitue un cas particulier de la règle de Darmois. On peut, comme ils le proposent et comme l'a indiqué aussi Otto Redlich <sup>(5)</sup>, supposer qu'il existe un équilibre

<sup>(3)</sup> *Ann. Chim.*, 11, VIII, 1937, p. 243.

<sup>(4)</sup> *Comptes rendus*, 197, 1933, p. 1121.

<sup>(5)</sup> *Z. physik. Chem.*, 182, 1938, p. 42.



entre les ions  $\text{NO}^3$  et une forme associée ou moyenne. Le spectre de l'ion  $\text{NO}^3$  est connu. Reste à déterminer celui de l'autre forme; von Halban a essayé de le faire, mais il a admis pour cela qu'à  $3130 \text{ \AA}$  la deuxième forme n'absorbe pas. Or nous avons trouvé qu'à cette longueur d'onde la loi de Beer ne s'applique pas. C'est à des longueurs d'onde plus grandes qu'il faut rechercher sa vérification et reprendre les calculs de von Halban.

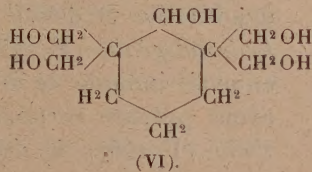
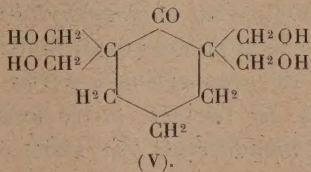
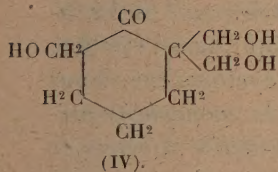
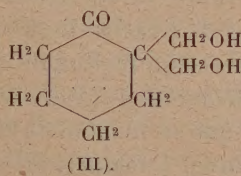
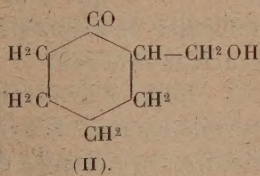
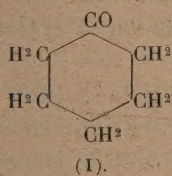
2° De  $11n$  environ jusqu'à  $19n$  on trouve de même un équilibre entre deux constituants. Peut-être s'agit-il d'un équilibre entre la forme moyenne précédente et la forme homéopolaire. Une étude est en cours sur ces différents points.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Recherches sur la condensation des aldéhydes acycliques avec les cétones cyclaniques. Condensation des aldéhydes formique et acétique avec la cyclohexanone.* Note de MM. **HENRY GAULT** et **EMERIC STECKL**, présentée par M. Marcel Delépine.

1. CONDENSATION DE L'ALDÉHYDE FORMIQUE AVEC LA CYCLOHEXANONE. —

a. *Méthylol-cyclohexanones.* — C. Mannich et W. Brose <sup>(1)</sup> ont obtenu, par condensation de la cyclohexanone (I) avec le formol, en présence de chaux, les *monométhylol-cyclohexanone* (II) et *tétraméthylol-cyclohexanone* (V) et, d'autre part, le *tétraméthylol-cyclohexanol* (VI).

Nous avons étudié les facteurs qui influent sur la formation de la monométhylol-cyclohexanone et cherché simultanément à isoler les termes intermédiaires correspondant à la fixation de *deux* et de *trois* molécules de formaldéhyde sur la cyclohexanone, c'est-à-dire les di- et triméthylol-cyclohexanones (III) et (IV) :



(1) *Ber. d. Chem. Ges.*, 56, 1923, p. 833.



Voici les premiers résultats que nous avons obtenus :

*Monométhylol-cyclohexanone* (II). — Le rendement en monométhylol-cyclohexanone paraît être surtout influencé par la concentration du formol. Dans des conditions identiques, le rendement *théorique* est, avec un formol à 12 pour 100, voisin de 75 pour 100, c'est-à-dire de moitié supérieur à celui que l'on obtient avec le formol à 35 pour 100 et que l'on peut aussi déduire du Mémoire de C. Mannich et W. Brose. Le rendement de transformation est, au contraire, faible.

*Diméthylol-cyclohexanone* (III). — Dans toutes les condensations que nous avons effectuées avec un excès de cyclohexanone (cyclohexanone 2<sup>mol</sup>; formaldéhyde 1<sup>mol</sup>), nous avons pu isoler, à côté de la monométhylol-cyclohexanone (E<sub>11</sub>, 114-115°), une fraction supérieure de distillation (E<sub>13</sub>, 170-171°) qui, par refroidissement, se prend en une masse cristalline. Le produit solide obtenu (F. 52-53°) est la *diméthylol-cyclohexanone* (III) (*Phénylhydrazone* F. 131-132°; *dérivé acétylé* E<sub>15</sub>, 180°).

La vitesse des réactions de fixation du formaldéhyde sur la cyclohexanone et sur la monométhylol-cyclohexanone est fonction du milieu réactionnel, c'est-à-dire de la nature et vraisemblablement de la basicité de l'agent de condensation employé. *A concentrations égales*, la chaux Ca(OH)<sup>2</sup> élève le rapport  $\frac{\text{Monométhylol-cyclohexanone}}{\text{Diméthylol-cyclohexanone}}$ , tandis que le carbonate de potassium agit en sens inverse.

*Triméthylol-cyclohexanone* (IV). — Nous n'avons pu ni isoler, ni caractériser ce dérivé triméthylolé dans aucune des condensations effectuées jusqu'à présent. Toutefois, dans des conditions de température convenables, nous avons obtenu un produit solide (F. 155°) qui répond à la formule de constitution C<sup>11</sup>H<sup>12</sup>O<sup>2</sup> et que nous considérons comme un produit de fixation de trois molécules de formaldéhyde sur la cyclohexanone avec élimination de deux molécules d'eau.

*b. Méthylol-cyclohexanols*. — Nous n'avons hydrogéné, pour l'instant, que la monométhylol-cyclohexanone. L'hydrogénation, en milieu alcoolique, à température ordinaire, en présence de nickel de Raney, est quantitative et donne naissance au *monométhylol-cyclohexanol* ou *hexahydrosaligénine* (E<sub>6</sub>, 125-127°), déjà obtenu par Matti<sup>(1)</sup> qui, sans l'étudier, en avait indiqué un mode de préparation à partir du cyclohexène. Nous avons préparé certains de ses dérivés, entre autres la *monophényluréthane* (F. 145°), le *dérivé monoacétylé* (E<sub>13</sub>, 128°) et le *dérivé dibenzoylé*

(1) *Bull. Soc. Chim.*, 4<sup>e</sup> série, 51, 1932, p. 974.



(E<sub>1</sub> 120°). Nous pensons être prochainement en état de donner les résultats de nos essais de polymérisation de ce diol.

2. CONDENSATION DE L'ALDÉHYDE ACÉTIQUE AVEC LA CYCLOHEXANONE. — Dans les mêmes conditions que l'aldéhyde formique, l'aldéhyde acétique se fixe sur la cyclohexanone avec formation de *monoéthylol-cyclohexanone* (E<sub>3</sub> 89-90°) et, entre autres produits, de *monoéthylidène-cyclohexanone*.

ANATOMIE VÉGÉTALE. — Chez le *Pinus pinea* chaque convergent conserve son individualité fonctionnelle pendant la réduction. Note<sup>(1)</sup> de M<sup>lle</sup> MADELEINE FOURCROY, présentée par M. Alexandre Guillaumond.

On a étudié les modalités de la réduction des convergents, surtout fréquente chez les Gymnospermes du genre *Pinus*, mais, à ma connaissance, on n'a pas cherché ce que devient alors la notion fondamentale de convergent « unité conductrice élémentaire d'une phyllorhize », d'après la définition même de Chauveaud<sup>(2)</sup>. Or, chez le Pin, le xylème et le phloème s'éteignent lentement et simultanément; le phloème, néanmoins, est le premier à disparaître<sup>(3)</sup>. Il en résulte qu'à partir d'un certain niveau, il n'existe plus de phloème entre les deux xylèmes fusionnant : il suffit qu'on soit assez près de la réduction des deux xylèmes en un seul.

L'insertion des radicules qui naissent à ces niveaux localement privés de phloème montre que chacun des convergents garde son individualité biologique : 1° il est rigoureusement seul à alimenter la radicelle, même si la fusion des xylèmes est très avancée; 2° le phloème qui semble éteint contribue au raccord criblé pour une part égale à celle de son homologue persistant.

La figure 1 ci-après, empruntée à une racine très jeune de *Pinus pinea*, fournit un cas de réduction peu avancée; mais déjà le phloème n'existe plus entre les deux xylèmes fusionnant. L'orientation des files cellulaires montre combien le convergent A est étranger au raccord radicellaire; en outre, le convergent B a gardé en puissance toutes ses facultés puisqu'un phloème P<sub>AB</sub>, éteint par la réduction, peut assurer le raccord criblé P'<sub>p</sub> au même titre que le phloème P<sub>CBp</sub>, P<sub>CB</sub> d'évolution normale.

(1) Séance du 1<sup>er</sup> août 1938.

(2) *La constitution des plantes vasculaires révélée par leur ontogénie*, Paris, 1921.

(3) M. FOURCROY, *Comptes rendus*, 206, 1938, p. 689.



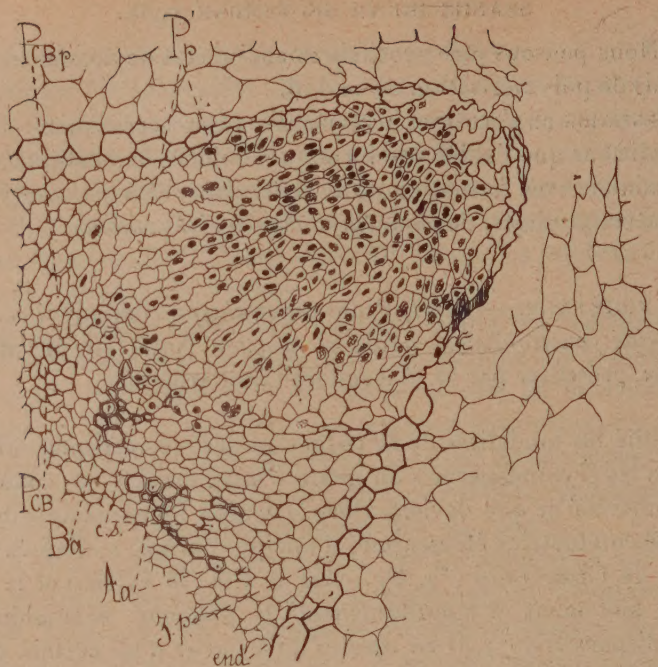


Fig. 1.

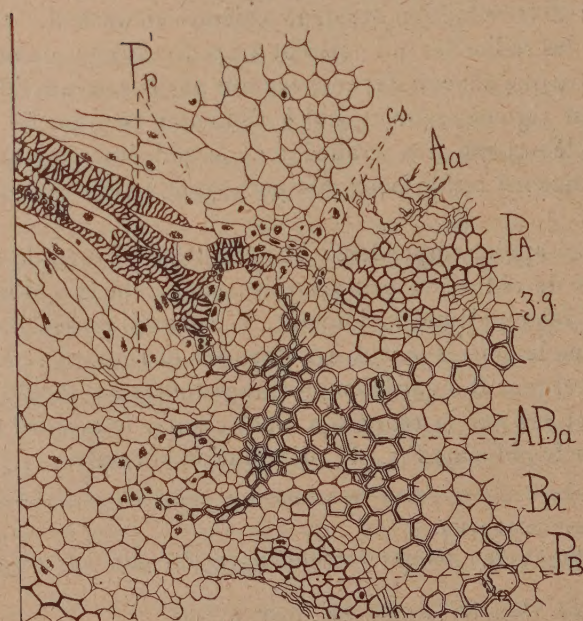


Fig. 2.



La figure 2 ci-contre, empruntée à une racine plus âgée du même *Pinus*, traduit un état de réduction très avancé : les parties linéairement centripètes des xylèmes alternes sont confondues. Néanmoins le convergent A alimente seul la radicule et les formations criblées sont comparables à droite et à gauche du xylème radicellaire malgré l'extinction totale du phloème  $P_{AB}$ . En outre, des cloisonnements sont apparus, symétriquement, à l'extérieur des branches droite et gauche du xylème alterne primitif Aa, réalisant d'un côté le prolongement de la zone génératrice libéroligneuse  $zg$  et s'établissant de l'autre comme si elle y existait. En tout cas, aucune tentative de jonction avec le phloème  $P_B$  n'est amorcée (les cloisonnements extérieurs au xylème Ba sont dus à la naissance d'une radicule alimentée exclusivement par B aux niveaux inférieurs). On pouvait s'attendre à ce que le phloème  $P_B$  participe au raccord criblé de la radicule en suppléance du phloème  $P_{AB}$  disparu ; il n'en est rien.

Malgré les modifications anatomiques, chaque convergent garde donc biologiquement sa valeur : faisceau vasculaire flanqué de deux demi-faisceaux criblés.

La séance est levée à 15<sup>h</sup> 15<sup>m</sup>.

A. Lx.

---



## ERRATA.

(Séance du 22 août 1938.)

Note de M. Robert-Ph. Dollfus, Cycle évolutif d'un Trématode du genre *Coitacæcum* W. Nicoll. Progenèse de la larve métacercaire chez des Amphipodes :

Page 431, ligne 2, *au lieu de Coitacæcum, lire Coitocæcum.*

Page 433, ligne 10, *au lieu de Auguilla, lire Anguilla.*

